

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. ZANGHIRATI

OPERATORI PSEUDODIFFERENZIALI DI TIPO GEVREY  
DI ORDINE INFINITO

3 MAGGIO 1984

Vari autori hanno rivolto la loro attenzione allo studio di operatori pseudodifferenziali di tipo Gevrey: ricordiamo Boutet de Monvel-Kreé [5], Valievic [12], e più recentemente, Hashimoto-Matsuzawa-Morimoto [6], Iftimie [8], Liess-Rodino [11].

In [5], [12], [6] sono considerati operatori con simboli classici, o più generalmente appartenenti alle classi  $S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$  di Hörmander [7], cioè soddisfacenti, per ogni sottoinsieme compatto  $K \subset \Omega$ , alla stima:

$$\sup_{x \in K} |D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} p(x, \xi)| \leq c_{K, \alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \quad |\xi| \gg$$

con costanti  $c_{K, \alpha, \beta}$  per le quali viene precisata la dipendenza da  $\alpha$  e  $\beta$ .

I simboli considerati in [11], pur contenendo quelli classici, possono essere riguardati, dal punto di vista  $C^{\infty}$ , come appartenenti alle classi di Beals [3]. Essi operano su classi Gevrey anisotrope generalizzate.

In ogni caso gli operatori considerati dagli autori sopracitati sono definiti su  $C_0^{\infty}(\Omega)$  e sono di ordine finito. Osserviamo però che se si cerca la più larga classe di funzioni  $p(x, \xi) \in C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  per la quale l'operatore:

$$p(x, D) u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

sia definito sulle funzioni Gevrey di ordine  $\theta > 1$  con supporto compatto in  $\Omega$ , subito ci si accorge, utilizzando il teorema di Paley-Wiener, che non è necessario che  $\xi \rightarrow p(x, \xi)$  sia a crescita lenta. In effetti basta che per ogni  $\varepsilon > 0$  esista una costante  $c_{\varepsilon} > 0$  tale che:

$$|p(x, \xi)| \leq c_\epsilon \exp(\epsilon |\xi|^{1/\theta}) \quad , \quad |\xi| \gg$$

Simboli soddisfacenti più generalmente alla stima:

$$|p(x, \xi)| \leq c_\epsilon \exp(\epsilon |\xi|) \quad , \quad |\xi| \gg$$

sono detti di "ordine infinito". Tali sono, per esempio, i simboli degli operatori ultradifferenziali [9], ed i simboli analitici di Boutet de Monvel [4] ed Aoki [1], [2].

Partendo dall'osservazione precedente è possibile definire classi di operatori di ordine infinito che operano su spazi di funzioni Gevrey e sui loro duali e che sono Gevrey-pseudolocali.

Per i corrispondenti simboli vengono stabilite le regole del calcolo simbolico classico.

In particolare per operatori soddisfacenti una "condizione di ipoellitticità" è possibile provare l'esistenza di una parametrice (Teorema 2.3). Questo teorema estende alle ultradistribuzioni e ad operatori di ordine infinito il teorema 3.1 di [6].

Esempi di operatori Gevrey di ordine infinito sono quelli con simbolo della forma:

$$p(x, \xi) = \exp(\langle x, \phi(\xi) \rangle) \quad ,$$

con  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ,  $\phi_j$  simbolo classico di ordine minore di 1, come pure quelli con simbolo:

$$p(x, \xi) = \exp(-i \int_0^{x_n} a(x', t, \xi) dt)$$

con  $a(x', x_n, D)$  operatore pseudodifferenziale analitico classico di ordi-

ne minore di 1.

Operatori di quest'ultima forma compaiono naturalmente, ad esempio, nell'integrazione della così detta "equazione del trasporto";

$$\frac{\partial p}{\partial x_n} + i a p = 0$$

Nel seguito indicheremo con  $G^{(\theta)}(\Omega)$ ,  $\theta > 1$ ,  $\Omega$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ , lo spazio delle funzioni  $f \in C^\infty(\Omega)$  tali che per ogni compatto  $K \subset \Omega$  esiste una costante  $c_K$  per la quale riesce:

$$\sup_K |D^\alpha f| \leq c_K |\alpha| + 1 \quad \alpha!^\theta, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Indicheremo poi con  $G_0^{(\theta)}(\Omega)$ ,  $G^{(\theta)}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$ , e con  $G_0^{(\theta)'}(\Omega)$ ,  $G^{(\theta)'}(\Omega)$  i duali di  $G_0^{(\theta)}$  e di  $G^{(\theta)}$  rispettivamente. Per le topologie e le proprietà di tali spazi si veda, ad esempio [9], [10].

Siano  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $\delta$  numeri reali tali che  $\theta > 1$ ,  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ ;  
 $\theta \rho \geq 1$ .

**1. Definizione.** Indicheremo con  $S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  lo spazio delle funzioni  $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  soddisfacenti la seguente condizione: per ogni compatto  $K \subset \Omega$  esistono costanti  $C$  e  $B$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  una costante  $c_\varepsilon$  tale che:

$$(1) \quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x, \xi)| \leq c_\varepsilon C^{|\alpha| + |\beta|} \alpha!^\theta \beta!^{\theta(\rho - \delta)} (1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} \exp(\varepsilon |\xi|^{1/\theta}),$$

per  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$  e per  $x \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  con  $|\xi| > B|\alpha|^\theta$ .

Se  $p \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ , l'operatore pseudodifferenziale associato a  $p$  è definito, per  $u \in G_0^{(\theta)}(\Omega)$ , da:

$$(2) \quad P(x, D) u(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp(i\langle x, \xi \rangle) p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

dove  $u(\xi) = \int \exp(-i\langle x, \xi \rangle) u(x) dx$ .

Indicheremo con  $OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  lo spazio degli operatori della forma (2).

Il Teorema di Paley-Wiener per funzioni Gevrey assicura la assoluta convergenza dell'integrale a secondo membro di (2) e consente di derivare sotto il segno di integrale. In effetti si ha:

Teorema. Se  $p \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ , allora  $P(\cdot, D)$  definito da (2) è un operatore lineare continuo da  $G_0^{(\theta)}(\Omega)$  a  $G_0^{(\theta)'}(\Omega)$  che può essere esteso ad un operatore continuo da  $G^{(\theta)}(\Omega)$  a  $G^{(\theta)'}(\Omega)$ .

L'ultima affermazione del Teorema 2 è conseguenza del seguente:

3. Lemma. Sia  $p \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  e  $v \in G_0^{(\theta)}(\Omega)$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono costanti positive  $b_\varepsilon, c_\varepsilon$  tali che:

$$\left| \int \exp(i\langle x, \eta \rangle) p(x, \xi) v(x) dx \right| \leq c_\varepsilon \exp(-2\varepsilon |\eta|^{1/\theta}) + \varepsilon |\xi|^{1/\theta}$$

per  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\eta| > b_\varepsilon$ .

Il Teorema 2 assicura che  $P(x, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  definisce un'applicazione continua da  $G_0^{(\theta)}(\Omega)$  a  $G_0^{(\theta)'}(\Omega)$ . Quindi per il Teorema del nucleo per ultradistribuzioni [10], esiste una ed una sola ultradistribuzione  $K \in G_0^{(\theta)'}(\Omega \times \Omega)$  tale che:

$$\langle K, u \otimes v \rangle = \langle P(\cdot, D)u, v \rangle, \quad u, v \in G_0^{(\theta)}(\Omega).$$

$K$  dicesi il nucleo di  $P(\cdot, D)$ . Formalmente:

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int \exp(i\langle x-y, \xi \rangle) p(x, \xi) d\xi.$$

4. Lemma. Il nucleo  $K$  di  $P(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  è in  $G^{(\theta)}(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$ , dove  $\Delta$  denota la diagonale di  $\Omega \times \Omega$ .

Procedendo come nella dimostrazione del "Lemma del supporto singolare" per distribuzioni, si prova:

5. Lemma. Se  $T$  è un'applicazione lineare continua di  $G_0^{(\theta)}(\Omega)$  in  $G^{(\theta)}(\Omega)$  che si estende ad un'applicazione lineare continua di  $G^{(\theta)'}(\Omega)$  in  $G_0^{(\theta)'}(\Omega)$ , e se inoltre il corrispondente nucleo è in  $G^{(\theta)}(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$ , allora per ogni  $u \in G^{(\theta)'}(\Omega)$ :

$$\theta - \text{sing supp } Tu \subset \theta - \text{sing supp } u.$$

Dal Lemma 2, tenuto conto del Teorema 2 e del Lemma 4 discende subito:

6. Teorema. Ogni  $P(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  è  $\theta$  pseudolocale (cioè:  $\theta - \text{sing supp } P(\cdot, D)u \subset \theta - \text{sing supp } u$ , per ogni  $u \in G^{(\theta)'}(\Omega)$ ).

Come è usuale nel calcolo simbolico, è utile considerare oltre ai simboli in  $S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  anche serie formali asintotiche di tali simboli.

7. Definizione. Indicheremo con  $SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  lo spazio di tutte le serie formali  $\sum_{j \geq 0} p_j(x, \xi)$  dove  $p_j \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  soddisfa la seguente condizione:

per ogni compatto  $K \subset \Omega$  esistono costanti  $C$  e  $B$  e per ogni  $\epsilon > 0$  una costante  $c_\epsilon$  tale che:

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta p_j(x, \xi)| \leq c_\epsilon C^{|\alpha+\beta|+j} \alpha! (\beta! j!)^{\theta(\rho-\delta)} (1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|-(\rho-\delta)j} \exp(\epsilon|\xi|^{1/\theta}).$$

per  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$  e per  $x \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  con  $|\xi| \geq B(j + |\alpha|)^\theta$ .

Sia  $p \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ ,  $p_0 = p$ ,  $p_j^- = 0$  per ogni  $j > 0$ ; allora

$\sum_{j \geq 0} p_j \in SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ . Sicché, identificando  $p$  con  $\sum_{j \geq 0} p_j$ , otteniamo la naturale inclusione.

$$(3) \quad S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega) \subset SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega).$$

Nella classe  $SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  introduciamo la seguente relazione di equivalenza:

8. Definizione.  $\sum_{j \geq 0} p_j$  e  $\sum_{j \geq 0} q_j \in SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  si dicano equivalenti ( $\sum_{j \geq 0} p_j \sim \sum_{j \geq 0} q_j$ ) se, per ogni sottoinsieme compatto  $K \subset \Omega$  esistono costanti  $C$  e  $B$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una costante  $c_\varepsilon$  tale che:

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta \sum_{j \geq 0} (p_j(x, \xi) - q_j(x, \xi))| \leq c_\varepsilon c^{|\alpha+\beta|+s} \alpha! \beta! s!^{\theta(\rho-\delta)} (1+|\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta| - (\rho-\delta)s} \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\theta}),$$

per  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $x \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  con  $|\xi| \geq B(s + |\alpha|)^\theta$ ,  $s > 0$ .

Resta così definita, tenuto conto di (3), una relazione di equivalenza in  $S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ .

Indicheremo con  $V_R^\theta(\Omega)$  lo spazio degli operatori  $\theta$ -regolarizzanti in  $\Omega$ , cioè lo spazio di tutti gli operatori lineari continui da  $G_0^{(\theta)}(\Omega)$  a  $G^{(\theta)}(\Omega)$  che si prolungano ad operatori lineari continui da  $G^{(\theta)'}(\Omega)$  a  $G^{(\theta)}(\Omega)$ .

Dalla Definizione 8 segue:

9. Proposizione. Se  $p \sim 0$  in  $SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  allora  $P(\cdot, D) \in V_R^\theta(\Omega)$ .

Come per gli operatori pseudodifferenziali classici, ad ogni simbolo formale si può associare un simbolo vero. Si ha infatti:

10. Teorema. Per ogni  $\sum_{j \geq 0} p_j \in SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  esiste un  $p \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  tale che  $p \sim \sum_{j \geq 0} p_j$  in  $SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ .

Si ottiene  $p$  come somma di una serie  $\sum_{j \geq 0} \phi_j(\xi) p_j(x, \xi)$ ,

dove  $\{\phi_j\}$  è una successione di funzioni indefinitamente differenziabili tali che  $0 \leq \phi_j \leq 1$ ,  $\phi_j(\xi) = 0$  se  $|\xi| < 2R \sup(j^\theta, 1)$ ,  $\phi_j(\xi) = 1$  se  $|\xi| > 3R \sup(j^\theta, 1)$  e  $|D^\alpha \phi_j| \leq (\frac{C}{Rj^{\theta-1}})^{|\alpha|}$  se  $|\alpha| \leq 2j$  ( $R$  è una costante positiva che viene scelta opportunamente nel corso della dimostrazione).

Per quel che riguarda la composizione dei simboli valgono le regole usuali del calcolo simbolico.

11. Definizione. Se  $p, q \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ ,  $p \circ q$  è la serie formale  $\sum_{j \geq 0} r_j$  con  $r_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} (\alpha!)^{-1} \partial_\xi^\alpha p(x, \xi) D_x^\alpha q(x, \xi)$ .  
Più generalmente se  $\sum_{j \geq 0} p_j, \sum_{j \geq 0} q_j \in SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  allora  $(\sum_{j \geq 0} p_j) \circ (\sum_{j \geq 0} q_j) = \sum_{j \geq 0} r_j$  dove  $r_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|+h+k=j} (\alpha!)^{-1} \partial_\xi^\alpha p_h(x, \xi) D_x^\alpha q_k(x, \xi)$ .

Applicando la regola di Leibniz si ottiene subito:

12. Proposizione.  $(\sum_{j \geq 0} p_j) \circ (\sum_{j \geq 0} q_j) \in SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ .  
Se  $\sum_{j \geq 0} p_j' \sim \sum_{j \geq 0} p_j, \sum_{j \geq 0} q_j' \sim \sum_{j \geq 0} q_j$  allora  $(\sum_{j \geq 0} p_j') \circ (\sum_{j \geq 0} q_j') \sim \sim (\sum_{j \geq 0} p_j) \circ (\sum_{j \geq 0} q_j)$ .

13. Definizione. Se  $p \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  il trasporto di  $p$ ,  $p^\#$  è la serie formale  $\sum_{j \geq 0} q_j$ , dove  $q_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} (\alpha!)^{-1} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha p(x, -\xi)$ .  
In modo analogo si definisce  $(\sum_{j \geq 0} p_j)^\#$  se  $\sum_{j \geq 0} p_j \in SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ , ponendo



$$\left(\sum_{j \geq 0} p_j\right)^{\#} = \sum_{j \geq 0} q_j, \text{ con } q_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|+h=j} (\alpha!)^{-1} \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\alpha} p_j(x, -\xi).$$

14. Proposizione. Se  $\sum_{j \geq 0} p_j \in SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  allora

$$\left(\sum_{j \geq 0} p_j\right)^{\#} \in SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega) \text{ e } \left(\sum_{j \geq 0} p_j^{\#}\right)^{\#} \sim \sum_{j \geq 0} p_j.$$

Applicando le regole del calcolo simbolico si ottiene ora il seguente:

15. Teorema. Sia  $p \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ . Supponiamo che esistano un aperto  $\Omega_1$  relativamente compatto in  $\Omega$ , costanti positive  $C, B_1, B_2$  e per ogni  $\varepsilon$  una costante  $c_{\varepsilon}$  tali che:

$$\begin{aligned} |p(x, \xi)| &\geq c_{\varepsilon} \exp(-\varepsilon |\xi|^{1/\theta}) \quad x \in \Omega_1, \quad |\xi| \geq B_1; \\ |D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} p(x, \xi)| &\leq c |\alpha + \beta| \alpha! \beta!^{\theta(\rho - \delta)} (1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} |p(x, \xi)|, \\ x \in \Omega_1, \quad |\xi| &> B_2 |\alpha|^{\theta}, \quad |\xi| > B_1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \end{aligned}$$

Allora esiste  $q \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  tale che  $q$  o  $p \sim 1$  in  $SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ .

Con un procedimento usuale nella teoria degli operatori pseudodifferenziali, allargheremo la classe di operatori definita precedentemente considerando operatori della forma:

$$(4) \quad Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint \exp(i\langle x-y, \xi \rangle) a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi,$$

dove l'ampiezza  $a(x, y, \xi)$  è supposta appartenere ad uno degli spazi indicati nella Definizione 16. Proveremo poi che tali operatori coincidono, a meno di un operatore  $\theta$ -regolarizzante, con gli operatori definiti da (2).

16. Definizione. Indicheremo con  $S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  lo spazio delle fun

zioni  $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$  soddisfacenti la seguente condizione:  
 per ogni sottoinsieme compatto  $W \subset \Omega \times \Omega$  esistono costanti  $C$  e  $B$ , e per ogni  $\varepsilon > 0$  una costante  $c_\varepsilon$  tale che:

$$(5) \quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma a(x, y, \xi)| \leq c_\varepsilon |\alpha + \beta + \gamma| \alpha! (\beta! \gamma!)^{\theta(\rho - \delta)} (1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta + \gamma|} \exp(\varepsilon |\xi|^{1/\theta}),$$

per  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$  e per  $(x, y) \in W$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  con  $|\xi| \geq B|\alpha|^\theta$ .

Per il Lemma 3, se  $a(x, y, \xi)$  verifica (5) e  $u \in G_0^{(\theta)}(\Omega)$  allora per ogni compatto  $K \subset \Omega$  esistono costanti  $c, b, \varepsilon > 0$  tali che:

$$\left| \int \exp(-i\langle y, \xi \rangle) a(x, y, \xi) u(y) dy \right| \leq c \exp(-\varepsilon |\xi|^{1/\theta}), \quad x \in K, \quad |\xi| > b.$$

Pertanto l'operatore (4) è ben definito per  $u \in G_0^{(\theta)}(\Omega)$  e  $Au \in G^{(\theta)}(\Omega)$ . Inoltre l'applicazione  $A: G_0^{(\theta)}(\Omega) \rightarrow G^{(\theta)}(\Omega)$  è continua.

**17. Definizione.** Indicheremo con  $OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  lo spazio degli operatori della forma (4) con  $a \in S_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ .

Possiamo ora definire il nucleo  $K$  di  $A \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  come per gli operatori in  $OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ . Formalmente:

$$K(x, y) = (2\pi)^{-u} \int \exp(i\langle x - y, \xi \rangle) a(x, y, \xi) d\xi$$

dove  $a$  è l'ampiezza di  $A$ . Si può provare che  $K \in G^{(\theta)}(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$ .

**18. Osservazione.** Ogni operatore  $A \in V_R^{(\theta)}(\Omega)$  può essere rappresentato da (4) con  $a \in S_{1, 0}^{\infty, \theta}(\Omega)$  e soddisfacente la condizione:  
 per ogni sottoinsieme compatto  $W \subset \Omega \times \Omega$  esistono costanti  $c, h > 0$  tali che:

$$|D_x^\beta D_y^\gamma a(x, y, \xi)| \leq c^{|\beta+\gamma|+1} (\beta+\gamma)!^\theta \exp(-h|\xi|^{1/\theta})$$

per ogni  $(x, y) \in W$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ .

Abbiamo ora il seguente:

19. Teorema. Sia  $A \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ . Esiste  $P(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  tale che  $A - P(\cdot, D) \in V_R^\theta(\Omega)$ . Inoltre, se  $a$  è l'ampiezza di  $A$ , allora  $p(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} (\alpha!)^{-1} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x}$  in  $SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ .

Le seguenti proposizioni sono immediate conseguenze del teorema 19.

20. Proposizione. Se  $P(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  allora  ${}^tP(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  ed ha ampiezza  $p(y, -\xi)$ . Inoltre, esiste  $q(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  con simbolo  $q(x, \xi) \sim p^\#(x, \xi)$  tale che  ${}^tP(\cdot, D) - Q(\cdot, D) \in V_R^\theta(\Omega)$ .

21. Proposizione. Se  $A \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  allora esiste  $B \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  con ampiezza  $b(y, \xi)$  dipendente solo da  $y$  tale che  $A - B \in V_R^\theta(\Omega)$ . In particolare se  $A = q(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ , allora  $b(y, \xi) \sim q^\#(y, -\xi)$  in  $SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ .

Diremo che un operatore  $A \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  è propriamente supportato se il suo nucleo  $K$  è una  $\theta$ -ultradistribuzione propriamente supportata; cioè se  $\text{supp } K$  ha intersezione compatta con  $H \times \Omega$  e con  $\Omega \times H$  per ogni sottoinsieme compatto  $H \subset \Omega$ . Alternativamente,  $K$  è propriamente supportato su  $K$  e  ${}^tK$  sono operatori continui da  $G_0^{(\theta)}(\Omega)$  a  $G^{(\theta)'}(\Omega)$ .

Un operatore  $A \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  propriamente supportato applica  $G^{(\theta)}(\Omega)$  in  $G^{(\theta)}(\Omega)$  e  $G_0^{(\theta)}(\Omega)$  in  $G_0^{(\theta)}(\Omega)$ .

Se  $A, B \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  ed uno almeno è propriamente supportato, allora  $A - B \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ . Inoltre abbiamo:

22. Teorema. Siano  $P(\cdot, D), Q(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ . Supponiamo che uno almeno sia propriamente supportato. Allora  $P(\cdot, D) Q(\cdot, D) = T(\cdot, D) + R$ , dove  $t(x, \xi) \sim p(x, \xi)$  o  $q(x, \xi)$  in  $SF_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  e  $R \in V_R^{\theta}(\Omega)$ .

Dai Teoremi 15, 22, 6 segue subito:

23. Teorema. Sia  $P(\cdot, D) \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$ . Se  $p(x, \xi)$  soddisfa le ipotesi del Teorema 15 in un aperto  $\Omega_1$  relativamente compatto in  $\Omega$ , allora esiste un operatore  $Q \in OPS_{\rho, \delta}^{\infty, \theta}(\Omega)$  tale che  $QP = I + R$ , con  $R \in V_R^{\theta}(\Omega)$ . Quindi per ogni  $u \in G^{(\theta)}(\Omega_1)$ .

$\theta$ -sing supp  $u \subset \theta$ -sing supp  $Pu$ .

( $\theta$ -sing supp  $u$  designa il complementare in  $\Omega_1$  dell'unione degli aperti  $\Omega' \subset \Omega_1$  tali che  $u \in G^{(\theta)}(\Omega')$ ).

BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] AOKI, T. "Invertibility for microdifferential operators of infinite order", Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18 (1982), 1-29.
- [ 2 ] AOKI, T. "The exponential calculus of microdifferential operators of infinite order" I, II, III, IV, Proc. Japan Acad. 58, Sez. A. (1982), 58-61; 58(1982), 154-157; 59(1983), 79-82; 59(1983), 186-187.
- [ 3 ] BEALS, R. "A general calculus of pseudodifferential operators", Duke Math. J. 42 (1975), 1-42.
- [ 4 ] BOUTET de MONVEL, L. "Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini", Ann. Inst. Fourier, 22 (1972), 229-268.
- [ 5 ] BOUTET de MONVEL, L. - KREE, P. "Pseudodifferential operators and Gevrey classes", Ann. Inst. Fourier, 17 (1967), 295-323.
- [ 6 ] HASHIMOTO, S. - MATSUZAWA, T. - MORIMOTO, Y. "Opérateurs pseudodifférentiels et classes de Gevrey", Comm. in Part. Diff. Eq. 8 (12) (1983), 1277-1289.
- [ 7 ] HÖRMANDER, L. "Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations", Proc. Symp. Pure Math. (A.M.S., Providence, R.I.), 10 (1967), 138-183.
- [ 8 ] IFTIMIE, V. "Opérateurs hypoelliptiques dans les espaces de Gevrey", Bull. Soc. Sci. Math. Roumanie, 27 (1983), 317-333.
- [ 9 ] KOMATSU, H. "Ultradistributions I. Structures theorems and a characterization", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 20 (1973), 25-105.

- [10] KOMATSU, H. "Ultradistributions II; The Kernel theorem and ultradistributions with support in a manifold", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 24 (1977), 607-628.
- [11] LIESS, O. - RODINO, L. "Inhomogeneous Gevrey classes and related pseudodifferential operators", Bollettino U.M.I. Analisi Funz. e Appl. Serie VI, Vol. III-c, n. 1 (1984), 233-323.
- [12] VOLEVIC, L.R. "Pseudodifferential operators with holomorphic symbols and Gevrey classes", Trudy Moscov. Met. Obsc. 24 (1971), 43-68; (Trans. Moscov. Math. Soc., 24 (1974), 43-72).